S–249

B. A./B. Sc. (Third Semester)
EXAMINATION, 2018-19
MATHEMATICS
(Real Analysis)
(SOS/Maths./DSC–003)

Time : Two Hours] [*Maximum Marks : 70*

नोट : (i) खण्ड 'अ' से किन्हीं पाँच प्रश्नों के और खण्ड 'ब' से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Attempt any *five* questions from Section A and any *three* questions from Section B.

(ii) खण्ड 'अ' के प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों तक सीमित रखें।

Answer each question of Section A within 50 words.

(iii) अपने सभी प्रश्नों के उत्तर आपको दी गयी उत्तर पुस्तिका में ही दीजिये। अतिरिक्त उत्तर पुस्तिका नहीं दी जायेगी।

Limit your answers within the given answer book. Additional answer book (B-Answer book) should not be provided or used.

StudyHub.HNBGU

Scanned with OKEN Scanner

खण्ड—अ

(Section—A)

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

Attempt any *five* questions. Each question carries 5 marks.

1. माना कि $f : D \to R$, $g : D \to R$ $(D \neq \phi)$। यदि $f(x) \leq g(y)\ \forall\ x, y \in D$, तो सिद्ध कीजिए कि :

न्यूनतम ऊपरी परिबंध $f(D) \leq$ महत्तम निम्न परिबंध $g(D)$

Let $f : D \to R$, $g : D \to R$ $(D \neq \phi)$. If $f(x) \leq g(y)$ $\forall\ x, y \in D$, then show that :

$$\sup f(D) \leq \inf g(D)$$

2. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित समुच्चय, संवृत समुच्चय होता है।

Show that every finite set is a closed set.

3. यदि A और B, R के उपसमुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

जहाँ कि $\overline{A}$ का अर्थ समुच्चय (A) के संवरण से है।

StudyHub HNBGU

Scanned with OKEN Scanner

If A and B are subsets of R, then prove that :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

where $\overline{A}$ stands for closure of A.

4. यदि अनुक्रम $< x_n >$ और $< z_n >$ प्रत्येक l पर अभिसारित है और यदि $x_n < y_n < z_n \; \forall \, n \in N$, तो अनुक्रम $< y_n >$ भी l पर अभिसारित होगा।

If sequence $< x_n >$ and $< z_n >$ each converge to l and if $x_n < y_n < z_n \; \forall \, n \in N$, then sequence $< y_n >$ also converges to l.

5. दिखाइये कि अनुक्रम :

$$< x_n >; x_n = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} \ldots\ldots \frac{1}{\lfloor n}$$

अभिसारी है।

Show that the sequence :

$$< x_n >; x_n = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} \ldots\ldots \frac{1}{\lfloor n}$$

is convergent.

6. निम्नलिखित श्रेणी का अभिसारिता परीक्षण कीजिए :

$$\sum \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Test the convergence of the following series :

$$\sum \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

StudyHub HNBGU

Scanned with OKEN Scanner

7. निम्नलिखित श्रेणी का अभिसारिता परीक्षण कीजिए :

$$\frac{\lfloor 1}{1^n} + \frac{\lfloor 2}{2^2} + \frac{\lfloor 3}{3^3} + \frac{\lfloor 4}{4^4} + \frac{\lfloor 5}{5^5} + \ldots\ldots$$

Test the convergence of the following series :

$$\frac{\lfloor 1}{1^n} + \frac{\lfloor 2}{2^2} + \frac{\lfloor 3}{3^3} + \frac{\lfloor 4}{4^4} + \frac{\lfloor 5}{5^5} + \ldots\ldots$$

खण्ड—ब

(Section—B)

नोट : किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 15 अंक का है।

Attempt any *three* questions. Each question carries 15 marks.

8. सिद्ध कीजिए कि अन्तराल (0, 1) एक अगणनीय समुच्चय है।

Prove that interval (0, 1) is an uncountable set.

9. सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $< x_n >$ जो इस प्रकार परिभाषित है :

$$x_1 = \sqrt{2} \text{ और } x_{n+1} = \sqrt{2x_n},$$

समीकरण $x^2 - 2x = 0$ के धनात्मक मूल पर अभिसारित है।

StudyHub HNBGU

Scanned with OKEN Scanner

Prove that the sequence $< x_n >$ defined by :

$$x_1 = \sqrt{2} \text{ and } x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$$

converges to the positive root of the equation $x^2 - 2x = 0$.

10. यदि $< x_n >$ R में एक अनुक्रम है, जहाँ :

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots \frac{1}{n}$$

तो ज्ञात कीजिए $\lim_{n \to \infty} |x_{n+1} - x_n|$। सत्यापित कीजिए कि यह अनुक्रम कॉशी मानदण्ड को पूरा करता है या नहीं।

If $< x_n >$ is a sequence in R, where :

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots \frac{1}{n}$$

evaluate $\lim_{n \to \infty} |x_{n+1} - x_n|$. Verify if this sequence satisfies the Cauchy criterion.

11. निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left\{ \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \right\} \right]$$

StudyHub HNBGU

Scanned with OKEN Scanner

Examine the convergence of the following series :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left\{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right\}\right]$$

12. 'एकरूप अभिसारिता' को परिभाषित कीजिए एवं वीयरस्ट्रॉस M-परीक्षण का कथन लिखते हुए इसे सिद्ध कीजिए।

Define uniform convergence and state and prove Weierstrass M-test.

Study Hub HNBGU

Scanned with OKEN Scanner